

数学研究名言录

孙智宏 整理

一、数学的直觉能力

理解数学要观察数学现象。这里的观察不是用眼睛去看，而是根据某种感觉去体会。这种感觉虽然有些难以言传，但显然是不同于逻辑推理能力之类的纯粹感觉，我认为更接近于视觉，也可称之为直觉，为了强调是纯粹感觉，不妨称为“数觉”。

数学的敏锐如同听觉的敏锐一样，与头脑好坏没有关系，没有数觉的人不懂数学就象五音不全的人不懂音乐一样。

为什么要考虑这样的问题，应该向哪个方向推进，那不是由公理推出的，而是个感觉问题。实际上，由数觉的引导开拓新的研究，由直觉决定航行方向，凭着一种实在的预感去寻找有意义的问题。

Kodaira (小平邦彦)

数学证明不是演绎推理的简单并列，它是按某种次序安置演绎推理，这些元素安置的顺序比元素本身更为重要。数学次序的这种感觉、这种直觉使我们推测隐藏的和谐与关系，但它并不是每个人都具有的。有些人或者没有这种如此难以定义的微妙的感觉，或者没有超常的记忆力和注意力，因此他们绝对不可能理解较高级的数学，这种人是多数。另一些人仅略有这种感觉，但他们具有非同寻常的记忆力和高度的注意力这样的天赋，他们将一个接一个地记住各种细节，他们能够理解数学，有时也能应用，但他们不能创造。最后，还有一些人或多或少地具有所提到的特殊的直觉，因此，即使他们的记忆力毫无非同寻常之处，他们却不仅能够理解数学，而且可以成为创造者，并试图作出发明，其成功之大小取决于这种直觉在他们身上发展的程度之大小。

H.Poincare (亨利·庞加莱)

对于定理证明过程的理解，是不是仅须一步一步地考察证明过程的每一推理步骤，判断一下它们是否正确和符合规则就够了呢？对于某些人来说，事实就是如此，当他做完此事以后，便认为自己已经理解了。

但对绝大多数人来说，事情并非如此简单，他们还有许多更为苛刻的要求。他们不仅要知道每个证明步骤是否正确，而且还想进一步知道，这些步骤为什么必须这样联结，而不是那样联结。在他们看来，如果对这些证明步骤的安排，依然看不出什么目的性来的话，则就无法相信自己确已“理解”了。

无疑，他们对自己所追求的东西是说不太清楚的，亦即，他们不能明白无误地说出他们所企求的目标。然而，只要他们尚未彻底弄清，他们就总是含糊地感到其中缺了些什么。

H.Poincare (亨利·庞加莱)

一种类型主要是充斥着逻辑，读着他们的著作，我们会被他们一步一步引导着，在信任他们的道路上稳步前进，他们的作风就象战士们一道又一道地挖战壕那样，亦即不依赖任何机遇地步步逼近被围攻的敌营。另一种类型则是凭借于直觉了，他们能够一下子提出一个敏锐的、但有时是冒险的问题，就象一个勇敢而迅猛前进的骑兵。

Poincare(庞加莱)

一个人是数学家，那是因为他善于发现判断之间的类似；如果他能判明论证之间的类似，他就是个优秀的数学家；要是他竟识破理论之间的类似，那么他就成了杰出的数学家。可是，我认为还应当有这样的数学家，他能够洞察类似之间的类似。

Banach(巴拿赫)

学习任何数学主题的第一步是发展直觉。

C.B.Allendoerfer

逻辑仅仅是核准直觉的胜利。

Hadamard (阿达玛)

科学直觉直接引导与影响数学家们的研究活动，它与审美能力密切相关，在科学研究中是唯一不能言传而只能意会的一种才能，但这却是每一个有作为数学家所不可缺少的能力。

Hankel (汉克尔)

二、数学家的气质特征

数学家就是这样的四元数组：干劲、自信心、想象力和自我批评。

Sophus Lie (索福斯·李)

任何科学天赋都由三部分组成——智力、意志和激情，它们形成一种能完全被激情所支配的力量，这种力量是科学创造必不可少的，甚至是决定性的条件。

P.Alexandroff (亚历山德罗夫)

象我们这种工作需要注意两点：毫不疲倦的坚持性和随时准备抛弃我们为之花费了许多时间和劳动的任何东西。

Einstein (爱因斯坦)

在科学中，哪怕是在最严格的学科中，如果不能出现诗一般的激情和才智的闪烁，那么即使象阿基米德或牛顿这样的天才人物也不会找到真理。

Daunou (多诺)

真正的数学家都是非常热情的，没有热情就不会有数学的创造。

Novalis (努瓦列斯)

一个没有几份诗人才气的数学家就不是一个完美的数学家。

Weierstrass (魏尔斯特拉斯)

一个数学家，只有当他渐趋完美并能领悟到真理之美的光辉的时候，在他的工作逐步达到精确而明朗、纯粹而易于理解、优雅而具有吸引力的时候，他才能算得上一个完美的数学家。

Goethe (哥德)

数学家就是这样的人，对于他来说， $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 就象 $2+2=4$ 一样容易。

Kelvin (开尔文)

一个数学家越超脱越好。

Anonymous

天才就是狂烈的热情。

霍尔曼

天才是巨大忍耐的赠品。

布丰

三、数学研究的过程

真的，我们这门科学的重要概念，一般都是学者在孤寂的研究中发展和成熟的。也许除哲学之外，没有哪一门科学具有数学这种需要独处静思的特色。

Hurwitz (胡维茨)

数学也一样，普通的木头里没有埋着定理。但从外面却看不出里面究竟埋着什么，只好雕刻着看。数学中的雕刻就是一边进行繁复的计算，一边调查文献，决不是简单的。在许多情况下什么结果也没有，因此数学研究非常费时间。可以认为，研究的成败主要取决于运气的好坏。

Kodaira (小平邦彦)

数学发现的过程是愉快的，也是痛苦的。你始终都有一种隐痛的感觉，必须凝思苦虑，力求甚解。理解的水平不一：皮毛的理解，凭经验刚能说出一点东西；进一步的理解，开始发现关系；最高水平的理解，发现崭新的领域，这是很难碰到的。

沙利文

某种思想在被具体化以前的相当长一段时间里就已经产生了，它不是突然出现的，而是长时期艰苦努力的结果。有时，你并不知道当时的想法是否是真正的好想法，因为这取决于以后的发展。

陈省身

你可能做许多艰苦的无用功，重要的是千万别泄气，当你被某个问题缠住时，你会有许多不眠之夜。即使这样也还可能毫无成果，你只是失眠，而你想要的想法就是不出来。然而这些曲折却是重要的，没有它们你就不会有真正的突破。

陈省身

做学问不能中断。做研究断了以后，要更新再回去得花点工夫。遇到一个问题，就要全力以赴地去解决它。

丘成桐

科学是厉害的女主人公，她无情地榨取你的劳动，却只付给你极少的报酬。

Newton (牛顿)

任何一个人如果象我那样坚持深入持久地思考问题，都会得出我的那些发现。

Gauss (高斯)

有人抱怨说科研工作既艰苦又损害健康。那当然是这样！只有卷心菜没有神经，可它从它完美的健康中得到了什么呢？

Jacobi (雅可比)

攻克科学堡垒就象打仗一样，有人挂彩，有人牺牲，只有勇往直前才会

夺取最后胜利。

罗蒙诺索夫

世上所有的发明，一开始不是凭借理性，亦不是由于智慧；而是那些交了好运的人，在误解或失察中偶然碰到的。

S.Butter (巴尔特)

在非常有限的时间内解答问题使许多人感到困惑，而有些数学问题只可能在经长时间的孜孜不倦地冥思苦索，并引进新概念后才能得到解决。

Kolmogorov (柯尔莫哥洛夫)

给予我最大愉快的事不是知识本身，而是学习过程；不是所取得的成就，而是得出成就的过程。

C.F.Gauss (高斯)

热爱是最好的老师。
想象比知识更重要。

A.Einstein (爱因斯坦)

四、数学问题

年轻数学家面临的最困难问题就是如何找到一个问题。一个正确的问得好的问题就是这场战斗的一半。

P.R.Halmos

手头没有明确问题而去寻求一般方法的人，他们的工作多半是徒劳无益的。

D.Hilbert(希尔伯特)

在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要。

Cantor (康托尔)

计算是从问题走向答案，数学则是从答案走向问题。

P.Hilton

花费在解答问题上的力气所带来的成果往往比问题本身带来的成果有意思得多。

J.Dieudonne (丢东涅)

用新方法来解决老问题，可以推动纯粹数学的发展。当我们对老问题有了更好的理解，自然就会提出新的问题。

F.Klein(克莱茵)

当一个问题被提出来以后，我们应当立即看一看，首先研究另外一些问题是否更为有利，另外是哪些问题，以及按什么顺序进行研究。

Descartes(笛卡尔)

在解决一个数学问题时，如果我们没有获得成功，原因常常在于我们没有认识到更一般的观点，即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节。采取这样的观点后，不仅所研究的问题会容易解决，同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法。

D.Hilbert(希尔伯特)

在大多数场合，我们寻找一个问题的答案未获成功的原因是在于这样的事实，即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决。这时一切都有赖于找出这些比较容易的问题并用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们。这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一。

D.Hilbert(希尔伯特)

意义深刻的数学问题从来不是一找出答案就完事了，好象遵循着 Goethe 的格言，每一代数学家都重新思考并重新改造他们的前辈所发现的解答，并把这些解答纳入到当代流行的概念和符号体系中去。

L. Bers

没有解决完了的问题，它们仅仅是或多或少地解决了的问题。数学只能达到人的正确程度，而人是容易犯错误的。

H.Poincare (庞加莱)

不能导致理论的问题不是好问题，不是来源于问题的理论不是好理论。

M.F.Atiyah (阿提雅)

问题的好坏取决于研究问题所产生的数学的好坏。

A.Wiles (怀尔斯)

有的很重要的问题，就算能够得到很小很小的进步，从整个数学家来讲也算是很大的进步。你在一个很无聊的问题上有很大的进步也不算有很大的进步。

丘成桐

五、数学创造

在最初几年的数学研究中，知识面的广泛对于今后的全部工作将会产生极为深刻而有益的影响。

Glaisher (格雷希尔)

数学史警告我们不要草率地作出结论，而且告诉我们，每一个从事数学研究的人都不可太专门，因为看上去相差甚远的各个数学分支之间往往包含着意想不到的联系。

Cajori (卡约里)

学生应该及早地象数学大师那样去追求和进行大量的创造性思考活动，而不要让学校里那种无休止的练习把自己的头脑弄得僵化和贫乏。

Beltrami (贝尔特拉米)

大多数数学家基本上受他们要简化或要理解的欲望所驱使，最理想的位置是你有着丰富的现象而又似懂非懂的地方。懂得太多，它的熵反而低些，这种多少有点矛盾的情况最为理想。

沙利文

一个新思想最有意义的部分，常常不在那些最一般的深刻定理之中，而往往寓于最简单的例子、最原始的定义以及最初的一些结果。最重要的信息却常常包含在容易的部分，甚至在几个简单且深刻的观察之上。

M.F.Atiyah (阿提雅)

数学家们极端重视不期而遇的转折处，当预料不到的转折出现时，我们就意识到以前的理解的局限性，因而更深入地去探求新的解释。

M.F.Atiyah (阿提雅)

研究数学如同研究其它领域一样，当清楚地了解自己陷入某种不可思议的境地时，这往往离新发现只剩一半路程了。

P.G.L.Dirichlet (狄利克雷)

最不可思议的是用式子计算时，开始想的仅仅是式子上的事，但慢慢随着时间的推移，从中就有所发现了。

Kodaira (小平邦彦)

要想在数学上取得进展，就应该去阅读数学大师而不是其门徒的著作。

N.Abel (阿贝尔)

对自然界的深刻研究乃是数学发现最富饶的源泉。

Fourier (傅立叶)

我的主要工作都是与对众所周知的自然规律得出新的理解有关的。

Riemann (黎曼)

大量的事例使我们确信严格的方法同时也是简洁而易于理解的方法。

D.Hilbert (希尔伯特)

如果一个人在给科学增加术语而让读者接着研究摆在他面前的奇妙难尽的东西，那他就已经使科学获得了巨大的进展。

A.Cauchy (柯西)

数学发明的动力不是推理而是思想。

De Morgan (德摩根)

有成效的数学家和最好的学生并不会全神贯注于严格性，而是着眼于实质概念。

L.Bers

学习数学思维模式就象学习数学事实那样重要。

D.R.Weidman

数学方法是数学的本质，充分了解这种方法的人才是数学家。

Novalis(努瓦列斯)

甚至在数学里，发现真理的主要工具也是归纳和类比。

Laplace (拉普拉斯)

归纳与类比是现代数学的特点。在现代数学里定理让位于理论，而任何真理不过是无穷链中的一环。

J.J.Sylvester(西维勒斯特)

现在，没有一个数学家重视孤立定理的发现，除非它提供了某种线索，暗示了不容置疑的新的思想领域，它就象是从某个未曾被发现过的思想星球上飞来的陨石。

J.J.Sylvester (西维勒斯特)

一般来讲，我们可以把具有下述性质的所有研究工作都称做重要的：同本身就很重要的事物有关；具有很大的一般性；把表面上不同的学科统一在单一的观点之下，使之简化并得到阐明；其结果有可能产生许许多多的推论。

C. Segre (塞格雷)

我们常常需要把问题倒过来考虑。

Jacobi(雅可比)

拿道难题来试试，或许你无法攻克它，但却有可能获得别的东西。

Littlewood (李特伍德)

应该研究那些根本的问题，不要满足于在同一水平上不断写论文，要逐步跨越更高的台阶。

华罗庚

要面对原始问题，不要淹没在文献的海洋里。

杨振宁

不要太在意文献，文献中的方法不能彻底解决问题正说明了它的局限性。

Littlewood (李特伍德)

我讨厌这样的科学家，他们拿起一块木板，专找最薄的部位在最容易钻孔的地方钻很多孔。

Einstein (爱因斯坦)

一个数学家应该了解什么是好的数学，什么是不好的或者不太好的数学。有些数学是有开创性的，有发展的，这就是好的数学。

数学家主要看重的应该是数学上的工作，对社会上的评价不要太关心。

陈省身

看事物要有远见，要看得远一点及透彻点，绝不能只局限于在某一个小问题上兜转，要会顾及全局来看。

单是为名为利不可能作出最高水准的研究。我们一定要对科学产生浓厚的兴趣，要追求真理。

能够提出问题的时候，你已经成功了一半。加强自己提出问题的能力，在实际的工作和学习中注重这一能力的培养。

首先要有开阔的胸襟，有高的立意，敢于挑战前人认为比较重要的东西。其次，对已经认定的目标，要有百折不挠的牺牲精神，要能吃苦，能够承受失败，并在其中累积知识经验与技巧；在一切的努力付出之后，可能我们会在不经意间，收获我们的所有努力与付出。

在某一个时代我们觉得看清楚的问题，随着时间的进行，各门学科的发展，可能我们又看不清了，需要把以前的结论推翻了重新论证，所以我们必

须不断地学习，永远追求进步。而且，即使在殚精竭虑获得了一个答案后，我们也必须特别慎重，往往要经过反复地核对、计算，以确保它的正确。

丘成桐

我认为人生成就的大小，除了先天因素和环境因素外，主要取决于人的主观能动性。而主观能动性又依赖于个人的世界观、人生观和价值观。

独立思考和独立选题对一个科学研究者来说是至关重要的基本素质。

我对“创新”两个字的诠释基本有三点：“独立思考”、“走自己的路”和“寻求解决根本性意义的问题”。“独立思考”，就是要思、要想，而且要独立地想；“走自己的路”，就是要行、要做，而且还要用不同的方法去做。“思”和“行”都要针对具有根本性科学或实际意义的重要问题。

要有独立的想法和独到的见解，既异想天开又踏踏实实。

郭雷

对一个真正热爱科学研究的人来讲，争取项目经费不是研究目的，发表SCI论文也不是目的，用论文去赚钱更不是目的，甚至在国际上获大奖也不是研究目的。这些至多是在追求科学真理过程中的“手段”或“副产品”。但在管理和评价体制中，如果“目的”与“手段”被颠倒，或者“正品”与“副品”被颠倒，则结果将会大相径庭。遗憾的是，目前存在的许多科研成果评价指标，却在客观上鼓励了这种颠倒！这就是我们看到的目前学术界存在一些浮躁现象的原因之一。

郭雷

有真正研究才能的学生，要选择一个合适的题目是不困难的。假如他在学习的过程中不曾注意到知识的空白，或不一致的地方，或者没有形成自己的想法，那么作为一个研究工作者他的前途是不大的。

弗里奇

在数学的天地里，重要的不是我们知道什么，而是我们怎么知道什么。

Pythagoras(毕达哥拉斯)

年轻的确有优势，精力充沛，敢于幻想。对于年轻人，我的建议是：努力工作，别怕挑战“大东西”，即便那些东西“大”得超出你的想像。记住：任何真正的创新一开始看来都是没道理的。

格罗斯

六、关于数学的认识

当代数和几何分道扬镳的时候，它们各自进展缓慢，而且应用有限。一旦它们联袂而行，它们就相互从对方吸收新鲜的活力，而大踏步走向各自的完美。

Lagrange (拉格朗日)

代数是慷慨的，她给的往往超过人们之所求。

D'Alembert (达朗贝尔)

即使在初等数学中，断言再无发现或改进之余地，也未免操之过急。

I.Todhunter

每个人都知道曲线是什么，但如果他学习了很多数学，反而会被无数的例外情况搞糊涂。

F.Klein(克莱茵)

一个真理和一个很深的真理是不一样的。一个真理是对的，真理的反面是错的；一个很深的真理是对的，很深真理的反面也是对的。

N.Bohr (玻尔)

数学是科学的女皇，数论是数学的女皇。

Gauss (高斯)

数学是人类理性最原始的源泉。

A.Comte (科姆特)

数学是计算的艺术。

C.J.Keyser (开塞尔)

数学在于用最不显然的方式证明最显然的事情。

G.Polya (波利亚)

纯数学是魔术师的魔杖。

Novalis (努瓦列斯)

数学是什么？对于学者和门外汉，这个问题都不是靠哲学来回答的，而是靠从事数学的经验来回答的。

R.Courant (库朗)

在别的学科中每一代人都推翻前一代人所建立起来的理论，而只有在数学中才是每一代人都更上一层楼。

Hankel(汉克尔)

没有数学，我们无法看穿哲学的深度；没有哲学，人们也无法看穿数学的深度；而若没有这两者，人们就什么也看不透。

B.Demoulin(德莫林斯)

工匠后面是化学家，化学家后面是物理学家，而物理学家后面则是数学家。

W.F.White (怀特)

外部世界的合理次序与和谐是上帝用数学语言透露给我们的。

Kepler (开普勒)

科学家研究自然，并非因为她有用处。他研究她，是因为他喜欢她；他之所以喜欢她，是因为她是美的。如果自然不美，她就不值得我们了解；如果自然不值得我们了解，生活也就毫无意义。

Poincare(庞加莱)

七、数学家的研究风格

Lagrange 在形式和内容两个方面都很完美，他很细心地解释每一个步骤，因此他的推理易于了解。Laplace 则相反，他什么也不解释，完全不在乎形式，只要结果正确就满意了。Gauss 也象 Lagrange 那样严谨和精巧，但 Gauss 的推理和文章比 Lagrange 的推理和文章难于学习，因为 Gauss 总是隐去了他达到结果的分析过程与思路，证明过程虽然很严密，但却总是尽可能地简洁。

Ball(巴尔)

Sylvester(西维勒斯特) 有一个显著的特点，即他很少去记忆定理或命题。每当他要使用某些定理时，那就随时把它们推导出来。在这一点上，Sylvester 正好与 Cayley(凯利) 相反，Cayley 通晓并记住数学诸分支中已完成的各个重大成果。

Durfee(德尔菲)

Hamilton(哈密顿) 善于利用对比去从已知论证未知。虽然他有很好的直观，但他没有伟大的思想灵感，他长期而勤奋地对特殊问题进行工作以求看出一般性的东西。在解决许多特定的例子时他耐心而有条不紊，并且情愿作大量的计算去检查和证明一个论点。然而，在他的出版物中，却只有推敲和压缩了的一般结果。

M.Klein(克莱茵)

正如 Poincare 在太多的论文中那样，他凭自己的想象力和他非凡的直觉纵横驰骋，很少会将他引入歧途的；在几乎每一节里面都会有一个创始性的概念。不过我们别指望有准确的定义，常常我们还必须根据上下文的意思来猜测他脑子是怎么想的，许多结果他根本不给证明，而当他一旦想写一个证明时，几乎没有一条论据不让人疑窦丛生。他的论文是一种全新的概念在未来发展的蓝图，每一个新的概念都需要创造一套全新的技巧来为它奠定坚实的基础。

J.Dieudonne (丢东涅)

历史上的许多大数学家，比如 Euler 和 Gauss，为了给自己找到素材而不得不靠自己的双手进行冗长的数值计算，他们正是借助这些素材才推测出了具有普遍性的定律或者是发现了著名的模式。

M.F.Atiyah (阿提雅)

Riemann 具有非凡的直观能力，他的理解天才胜过所有同代数学家。Weierstrass 主要是一位逻辑学者，他缓慢地、系统地逐步前进，在他工作的分支中，他力图达到确定的形式。

F.Klein (克莱茵)

Riemann 的方法首先是一种发现的方法，而 Weierstrass 的方法则首先是一种证明的方法。

H.Poincare (庞加莱)

Riemann 从不在成堆的公式中隐藏自己的思想，他总是用少数几条原理阐明整个理论。

Ramanujan 的构成数学证明的概念只是一些最模糊的描述。他的全部结果，新的或老的，对的或错的，都是靠论证、直觉及归纳的混合处理而达到的，其中，他全都未能给出任何首尾一致的论据。

G.H.Hardy (哈代)

彼得堡数学家风格：善于联系经典问题，充分利用初等工具，追求解的精确性和实用性，不畏繁复计算。

当人们告诉 Heaveside (亥维赛) 他的运算方法缺乏严格证明时，他说：“我能够因为不完全理解消化过程就拒绝一顿美餐吗？”